

- ① Doppinque rettifiche π come intersezione di due piani: da
 $t = 2 - x = z - 1$ e $y = 3t$ otteniamo $\pi \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ 3x + y - 6 = 0 \end{cases}$

ed allora il generico piano per π ha equazione del tipo

$$(\lambda + 3\mu)x + \mu y + \lambda z - 3(\lambda + 2\mu) = 0.$$

D'altra parte il piano σ ha giacitura data da

$$\overrightarrow{P_0 P_1} \times \overrightarrow{P_0 P_2} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 1),$$

per cui la condizione di ortogonalit  tra π e σ diviene

$$0 = (\lambda + 3\mu, \mu, \lambda) \cdot (1, 0, 1) = 2\lambda + 3\mu \Rightarrow \lambda = -3 \text{ e } \mu = 2,$$

cos  si ottiene un'equazione per π : $3x + 2y - 3z - 3 = 0$.

Dato che P_0, P_1, P_2 sono su σ e π   normale a σ , le loro distanze dalla retta $\sigma \cap \pi$ coincidono con le loro distanze dal piano π . Si ottiene cos 

$$d(P_0, \pi \cap \sigma) = d(P_0, \pi) = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{22}}; \quad d(P_1, \pi \cap \sigma) = \frac{|3 + 3 - 3|}{\sqrt{22}} = \frac{3}{\sqrt{22}}$$

$$d(P_2, \pi \cap \sigma) = \frac{|2 - 3|}{\sqrt{22}} = \frac{1}{\sqrt{22}}. \quad \text{Perch  } P_2 \text{   il punto pi  vicino a } \pi \cap \sigma.$$

- ② Si tratta di determinare i punti P del dominio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ della funzione
 $z = f(x, y) = 600 + 150 \arctan(2x + y)$ che realizzano - se esiste - un massimo modulo del gradiente. Ove

$$\nabla f(P) = 150 \left(\frac{2}{1 + (2x + y)^2}, \frac{1}{1 + (2x + y)^2} \right) \quad \text{da cui} \quad |\nabla f(P)| = \frac{150\sqrt{5}}{1 + (2x + y)^2}$$

perch  $|\nabla f(P)|$ ha massimo (pari a $150\sqrt{5}$) per $2x + y = 0$,

cos  per tutti i punti del piano che stanno sulla retta $y = -2x$

la pendenza in tali punti   data perch  da $150\sqrt{5} \%$, e le coordi-
 nate di tali punti sono

$$\underline{P_t = (t, -2t, 600), \text{ per } t \in \mathbb{R}.}$$

③ la funzione f è di classe C^∞ su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Abbiamo $\frac{\partial f}{\partial n} = y \sin n + n y \cos n = y (\sin n + n \cos n)$ e

$\frac{\partial f}{\partial y} = n \sin n$, perciò $\nabla f = (y(\sin n + n \cos n), n \sin n)$.

I punti critici per f sono perciò dati dalle soluzioni di

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y(\sin n + n \cos n) = 0 \\ n \sin n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ ①} \\ \text{oppure} \begin{cases} \sin n = 0, n \neq 0 \\ y \cos n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \neq 0 \\ \sin n = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ②}$$

Vi sono quindi due insiemi di punti ① e ②.

critici: il primo ① è costituito dai punti $P_y = (0, y)$ con $y \in \mathbb{R}$,

il secondo ② è invece costituito dai punti $P_k = (k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$.

Calcoliamo la matrice hessiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} = y (\cos n + \cos n - n \sin n) = y (2 \cos n - n \sin n),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial n \partial y} = \sin n + n \cos n, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \text{perci\`o}$$

$$H = \begin{pmatrix} y(2 \cos n - n \sin n) & \sin n + n \cos n \\ \sin n + n \cos n & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $H(P_y) = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante nullo,

quindi non fornisce alcuna indicazione sulla natura di P_y .

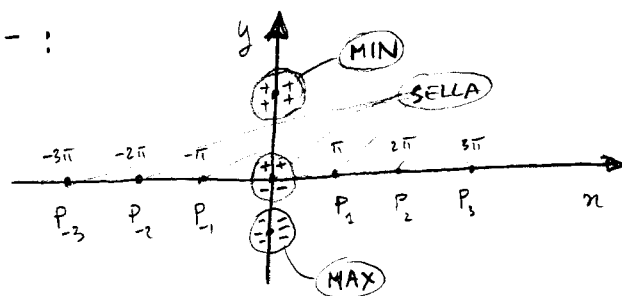
Invece $H(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \pi k \\ (-1)^k \pi k & 0 \end{pmatrix}$ è non singolare ed

indefinita, perciò tutti i punti $\{P_k = (k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$ sono punti di sella.

Discutiamo ora la natura dei punti ① di tipo $P_y, y \in \mathbb{R}$.

Si tratta dei punti sull'asse coordinato delle y . Su di essi abbiamo che $f(P_y) = f(0, y) = 0$, mentre in ogni loro

intorno la funzione $f(n, y)$ assume il segno indicato in figure de + e - :



$$f(n, y) = y \cdot n \sin n$$

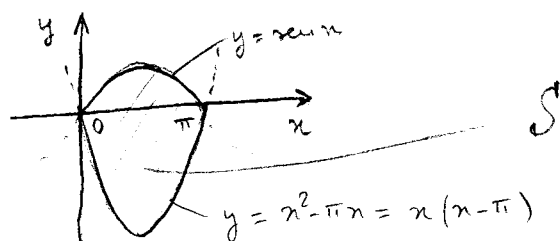
Tutti n e $\sin n$ sono concordi (uscò hanno stessò segno) per valori "piccoli" delle n .

Concludiamo quindi che :

- i punti $P_y = (0, y)$ per $y > 0$ sono di minimo rel.
- i punti $P_y = (0, y)$ per $y < 0$ sono di massimo rel.
- il punto $P_0 = (0, 0)$ è un altro punto di sella.

In fine osserviamo che la $f(n, y)$ non ha né max né min assoluti poiché, ad esempio, $f|_{n=\pi/2} = \pi/2 y$ assume tutti i valori reali.

④ la regione S di cui si cerca il baricentro è raffigurata con:



$$\begin{aligned} \text{la sua area è data da } A &= \int_0^\pi (\sin n - n^2 + \pi n) dn = \left[-\cos n - \frac{n^3}{3} + \frac{\pi}{2} n^2 \right]_0^\pi \\ &= 1 - \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2} + 1 = 2 + \frac{\pi^3}{6} \end{aligned}$$

Inoltre la simmetria delle figure fornisce subito le ascisse del baricentro, date da $n_B = \pi/2$.

$$\text{la sua ordinata è data da } y_B = \frac{\iint_S y \, dn \, dy}{A} \quad \text{Dunque}$$

calcoliamo l'integrale $\iint_S y \, dx \, dy = \int_0^\pi dx \int_{n^2-\pi n}^{\sin n} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[y^2 \right]_{n^2-\pi n}^{\sin n} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sin^2 n - n^4 + 2\pi n^3 - \pi^2 n^2) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(n - \sin n \cos n) - \frac{n^5}{5} + \frac{\pi n^4}{2} - \frac{\pi^2 n^3}{3} \right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{4} (\pi - \frac{\pi^5}{15}) .$$

In effetti $\int \sin^2 n \, dx = -\sin n \cos n + \int \cos^2 n \, dx = -\sin n \cos n + \int (1 - \sin^2 n) \, dx$

da cui $\int \sin^2 n \, dx = \frac{1}{2} (n - \sin n \cos n) + C$

In definitiva $B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi - \frac{\pi^5}{15}}{8 + \frac{2\pi^3}{3}} \right) .$

⑤ In coordinate sferiche (R, φ, Θ) la regione V si trasforma in $V' = \{ (R, \varphi, \Theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq R \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} \} .$ Dunque

$$\iiint_V e^z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V'} e^{R \cos \varphi} R^2 \sin \varphi \, dR \, d\varphi \, d\Theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^1 -R \, dR \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -R \sin \varphi e^{R \cos \varphi} \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^1 -R \left[e^{R \cos \varphi} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dR =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 -R (1 - e^{\frac{\sqrt{2}}{2} R}) \, dR = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (R e^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} - R) \, dR =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\left[\sqrt{2} R e^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} \right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} \, dR - \left[\frac{R^2}{2} \right]_0^1 \right) = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2 \left[e^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2 - \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\pi \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{3}{2} \right) .}}$$

⑥ la serie è a termini positivi, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ con $a_n = \frac{n^3}{\lambda^n}$ -

Se $0 < \lambda \leq 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \cdot n^3 = +\infty$ poiché $\frac{1}{\lambda} \geq 1$

Se $\lambda > 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{\lambda^n} \stackrel{(H)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n \lambda^{n-1}} \stackrel{(H)}{=} \dots$

$$\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2}{n(n-1)(n-2) \lambda^{n-3}} = 0, \text{ dunque}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesimale e il suo ordine è $>$ di ogni reale

$\alpha > 0$, come si può verificare facilmente dopo aver osservato che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha+3}}{\lambda^n} = 0$

(applicando un argomento analogo a quanto appena fatto).

In definitiva per $0 < \lambda \leq 1$ la serie diverge e per $\lambda > 1$ la serie converge.